ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐINH THỊ LIÊN

PHƯƠNG PHÁP VÉC TƠ ĐIỂM VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐINH THỊ LIÊN

PHƯƠNG PHÁP VÉC TƠ ĐIỂM VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp

Mã số: 8 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS.TS: TRỊNH THANH HẢI

THÁI NGUYÊN - 2019

Mục lục

Lời cảm ơn

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình, chu đáo của thầy Trịnh Thanh Hải. Các thầy cô giáo trong khoa Toán - Tin, trường Đại học Khoa học cùng toàn thể các bạn trong lớp Cao học K12 đã tạo mọi điều kiện, nhiệt tình ủng hộ em trong suốt quá trình làm luận văn. Em xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành, sâu sắc với tất cả những đóng góp quý báu của thầy cô và các bạn đặc biệt là thầy Trịnh Thanh Hải. Tuy đã có nhiều cố gắng trong quá trình làm luận văn, nhưng do thời gian và kiến thức còn hạn chế nên luận văn không tránh khỏi những thiếu sót. Kính mong nhận được sự góp ý của quý Thầy, Cô và các bạn.

Mặc dù bản thân em đã hết sức cố gắng nhưng do thời gian nên luận văn không tránh khỏi một vài lỗi. Em rất mong nhận được sự chỉ bảo của các thầy cô để em tiếp tục hoàn thiện nội dung luận văn.
Em xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 10 năm 2019
Tác giả

Đinh Thị Liên

Lời nói đầu

1. Lý do chọn đề tài

Phương pháp véc tơ điểm là một trong những phương pháp được sử dụng trong giải các bài toán hình học và cho ta những lời giải rất thú vị.

Ở Việt Nam, cũng đã có một số tài liệu đề cấp đến *Phương pháp véc tơ điểm*, ví dụ như cuốn Hình học véc tơ và cuốn Bài tập hình học véc tơ của GS. Nguyễn Thúc Hào.

Phương pháp véc tơ điểm có một vài điểm khác biệt so với phương pháp véc tơ thông thường, tuy nhiên đây lại là một công cụ rất hay cho phép ta đưa ra những lời giải thú vị, ngắn ngọn cho nhiều bài toán dành cho học sinh giỏi về hình học.

Liên quan đến hướng của đề tài này, ở Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên chưa có học viên nào nghiên cứu và viết luận văn, cũng như thông qua tìm hiểu qua mạng internet và thư viện của Đại học Thái Nguyên, tôi được biết đây là đề tài ít người nghiên cứu và chưa có đề tài nào trùng lặp.

Xuất phát từ thực tế trên và với mục đích tích lũy thêm các kiến thức về *Phương Pháp véc tơ điểm* và vận dụng phương pháp này vào giải một số bài toán đếm trong các đề thi học sinh giỏi trong nước và quốc tế làm tư liệu cho công việc giảng dạy của bản thân, chúng em đã lựa chọn hướng nghiên cứu vận dụng *Phương pháp véc tơ điểm* vào giải một số bài toán về hình học dành cho học sinh giỏi.

2. Nhiệm vụ nghiên cứu

Luận văn tập trung vào hoàn thành các nhiệm vụ chính sau:

- Tìm hiểu phương pháp véc tơ điểm.
- Ý tưởng vận dụng phương pháp véc tơ điểm vào giải bài toán hình học.
- Sưu tầm một bài toán, đề thi về bài toán hình học dành cho học sinh giỏi.
- Đưa ra lời giải bằng cách vận dụng phương pháp véc tơ điểm để giải một số bài toán hình học dành cho học sinh giỏi.

Ngoài ra luận văn cũng đưa ra các cách giải khác nhau của cùng một hình học bằng phương pháp véc tơ điểm và phương pháp khác để so sánh những phương pháp giải đó với nhau để có những nhận xét thú vị.

3. Nội dung của đề tài luận văn

Nội dung luận văn ngoài phần mở đầu, kết luận, tài liệu tham khảo sẽ gồm 2 chương:

Chương 1: Trình bày các kiến thức liên quan đến việc vận dụng phương pháp véc tơ vào giải một số bài toán hình học.

Chương 2: Trình bày về phương pháp véc tơ điểm và một số ví dụ minh họa việc vận dụng phương pháp véc tơ điểm vào giải bài toán hình học.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Trong chương trình hình học ở THPT, học sinh đã được làm quen với phương pháp véc tơ, phương pháp tọa độ. Để có một cái nhìn tổng quan thì trong nội dung chương 1 sẽ trình bày một vài kiến thức chung về véc tơ và hai phương pháp quen thuộc trong chương trình hình học THPT là phương pháp tọa độ và phương pháp véc tơ.

1.1. Sơ lược về véc tơ

1. Các khái niệm và định nghĩa véc tơ.

1. Véc tơ là 1 đoạn thẳng có định hướng. Véc tơ $\overrightarrow{AB}$ có hướng từ A tới B (A gốc, B ngọn) có giá là đường thẳng đi qua A, B có độ dài là độ dài của đoạn thẳng AB và được kí hiệu là $|\overrightarrow{AB}|$.

2. Hai véc tơ gọi là cùng phương nếu chúng có giá song song hoặc trùng nhau.

3. Hai véc tơ bằng nhau nếu chúng có cùng chiều và cùng độ dài.

4. Ba véc tơ gọi là đồng phẳng với nhau nếu các giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.

5. Các khả năng đồng phẳng của 3 véc tơ là :

a. Nếu 1 trong 3 véc tơ có 1 và véc tơ $\vec{0}$.

b. Nếu có 2 véc tơ cùng phương.

c. $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC} \leftrightarrow O, A, B, C$ cùng thuộc một mặt phẳng.

d. Nói chung là ta thường gặp phải trường hợp chứng minh ba véc tơ đồng phẳng ở trạng thái là các giá của chúng nằm trên 3 đường thẳng chéo nhau.

2. Tích vô hướng của hai véc tơ.

a. Định Nghĩa $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|cos(\vec{a}, \vec{b}) \in R.$

b. Tính chất $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0; \vec{a}^2 = \vec{a}.\vec{a} = |\vec{a}||\vec{a}|cos(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}|^2.$

3. Phân tích véc tơ trong không gian 1, 2, 3 chiều.

1. Nếu $\vec{a} \neq \vec{0}$ thì $p.\vec{a} = 0 \Leftrightarrow p = 0$

2. Nếu $\vec{a} \neq \vec{0}$ thì $\vec{b}$ cùng phương $\vec{a} \Leftrightarrow \exists! p \in R : \vec{b} = p.\vec{a}$

3. Nếu $\begin{cases} \vec{a}, \vec{b} \neq 0 \\ \vec{a}, \vec{b} \text{ không cùng phương} \end{cases}$ thì $p.\vec{a} + q.\vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow p = q = 0$

4. Nếu $\begin{cases} \vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0} \\ \vec{a}, \vec{b} \text{ không cùng phương} \end{cases}$ thì $\vec{c}$ đồng phẳng $\vec{a}, \vec{b} \Leftrightarrow \exists! p, q \in R : \vec{c} = p.\vec{a} + q.\vec{b}$

5. Nếu $\begin{cases} \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \neq 0 \\ \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ không đồng phẳng} \end{cases}$ thì $\forall \vec{d}$ luôn $\exists! p, q, r \in R : \vec{d} = p.\vec{a} + q.\vec{b} + r.\vec{c}$

1.2. Phương pháp véc tơ

Phương pháp véc tơ trong chương trình toán THPT là việc đưa vào các tính chất của các véc tơ để biến đổi các điều kiện đã cho của bài toán dẫn tới điều cần chứng minh.

Một vài ví dụ minh họa:

Bài toán 1.2.1. (Đề thi Olympic Toán học các nước Đông Âu - Kurschak,1995).

Cho một tam giác với ba đỉnh và ba điểm nguyên (tức là chúng có thành phần tọa độ nguyên). Biết rằng trên ba cạnh của tam giác không có điểm nguyên nào khác và bên trong tam giác có đúng một điểm nguyên. Chứng minh rằng điểm đó phải là trọng tâm.

Lời giải

Chọn một gốc bất kì rồi kí hiệu ba véc tơ biểu diễn ba điểm A, B, C lần lượt là $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Khi đó, điểm D nằm bên trong tam giác sẽ được biểu diễn bởi véc tơ.

$\vec{d} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c}$ với λ, μ, ν là ba số thực dương có tổng bằng 1.

Giả sử $\lambda > \dfrac{1}{2}$. Ta xét điểm được biểu diễn bởi véc tơ $2\vec{d} - \vec{a}$

Vì $\vec{d}$ và $\vec{a}$ có tọa độ nguyên nên điểm này cũng nguyên.
Mặt khác, $2\vec{d}-\vec{a} = (2\lambda-1)\vec{a}+2\mu\vec{b}+2\nu\vec{c}$, tức là nó cũng nằm bên trong tam giác (do các thành phần đứng trước dương và có tổng bằng $(2\lambda-1)+2\mu+2\nu = 1$. Theo giả thiết, điểm này phải trùng với D. Vậy $2\vec{d}-\vec{a} = \vec{d}$. Điều này mâu thuẫn.
Tương tự, nếu $\lambda = \dfrac{1}{2}$ thì $2\vec{d}-\vec{a} = 2\mu\vec{b}+2\nu\vec{c}$, nên suy ra D nằm trên đoạn thẳng BC (trừ B và C). Điều này mâu thuẫn. Từ đó, ta có $\lambda < \dfrac{1}{2}$.
Cũng tương tự như trên, ta được $\mu < \dfrac{1}{2}$ và $\nu < \dfrac{1}{2}$.
Bây giờ, ta xét điểm được biểu diễn bởi

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-2\vec{d} = (1-2\lambda)\vec{a}+(1-2\mu)\vec{b}+(1-2\nu)\vec{c}.$$

Các thành phần biểu diễn trên là dương và có tổng bằng 1, đằng khác, nó cũng là điểm nguyên.Vậy nó phải trùng với D.
Suy ra $\vec{d} = \dfrac{(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})}{3}$, nói cách khác, D chính là trọng tâm của tam giác ABC.
Bài toán 1.2.2. (Đề thi OLympic Balkan, 1985).

Cho tam giác ABC có O là trọng tâm của đường tròn ngoại tiếp. Gọi D là trung điểm AB, E là trọng tâm tam giác ACD. Chứng minh rằng OE vuông góc với CD nếu và chỉ nếu AB = AC.

Lời giải

Đặt $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Suy ra $\overrightarrow{OD} = \dfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}), \overrightarrow{OP} = \dfrac{3}{4}\vec{a}+\dfrac{1}{4}\vec{b}$, với P là trung điểm AD.

Từ đó $\overrightarrow{OE} = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{3}{4}\vec{a}+\dfrac{1}{4}\vec{b}\right)+\dfrac{1}{3}\vec{c} = \dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{6}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}.$
ta lại có $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC} = \dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}$

Do đó, $OE \perp CD$ nếu và chỉ nếu $(\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c})(3\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}) = 0$.
Khai triển và để ý $\vec{a}^2 = \vec{b}^2 = \vec{c}^2$, ta được $\vec{a}(\vec{b}-\vec{c}) = 0$, đẳng thức này xảy ra nếu và chỉ nếu $OA \perp BC$. Suy ra điều phải chứng minh.
Bài toán 1.2.3. (Đề thi Olympic, Balkan, 1996)

Gọi d là khoảng cách giữa tâm đường tròn ngoại tiếp và trọng tâm của một tam giác. Gọi R và r lần lượt là bán kính của đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác đó. Chứng minh rằng $d^2 \leq R(R-2r)$.

Lời giải

Dùng véc tơ, lấy gốc là O, tâm là đường tròn ngoại tiếp. Gọi các véc tơ OA, OB, OC lần lượt là $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Khi đó $\overrightarrow{OG} = \dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$. Suy ra $9OG^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2(\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{c} + \vec{c}\vec{a})$

Ta có $\vec{a}^2 = \vec{b}^2 = \vec{c}^2 = R^2, 2\vec{a}\vec{b} = 2R^2cos2C = 2R^2 - AB^2 = 2R^2 - c^2$

Và các hệ thức tương tự (đặt AB = c, BC = a , CA= b).

Từ đó $9OG^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$.

Ta lại có $(a^2 + b^2 + c^2) \geq \sqrt[3]{a^2b^2c^2}$. Do đó $R^2 - OG^2 \geq \dfrac{1}{3}\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$.

Kí hiệu [.] là diện tích, ta có [ABC] = [IAB] + [IBC] + [ICA] = $\dfrac{1}{2}(rc+ra+rb)$, ở đây I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Vậy 2[ABC] = r (a + b + c) = $\dfrac{abc}{2R}$.

Từ đó 2 r R = $\dfrac{abc}{a+b+c} \leq \dfrac{1}{3}\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$

suy ra $R^2 - OG^2 \geq 2rR$.

Bài toán 1.2.4. (Đề thi Olympic, Balkan, 1996).

Trong một ngũ giác lồi, ta xét 5 đường thẳng, mỗi đường thẳng nối một đỉnh và trung điểm cạnh đối diện đỉnh đó. Chứng minh rằng nếu có 4 trong 5 đường thẳng này cùng đi qua một điểm thì đường thẳng còn lại cũng đi qua điểm đó.

Lời giải

Xét ngũ giác lồi ABCDE. Gọi O là điểm chung của 4 đường thẳng đi qua A, B, C, D và trung điểm cạnh đối diện tương ứng như đã nói ở đề bài.

Đặt $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}, \overrightarrow{OD} = \vec{d}, \overrightarrow{OE} = \vec{e}$.

Cạnh đối diện đỉnh A là CD. Gọi I là trung điểm CD thì $\overrightarrow{OI} = \dfrac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d})$.

Do đó ta có $\vec{a} \times (\vec{c} + \vec{d}) = 0$, suy ra $\vec{a} \times \vec{c} - \vec{d} \times \vec{a}$.

Tương tự $\vec{b} \times \vec{d} = \vec{e} \times \vec{b}, \vec{c} \times \vec{e} = \vec{a} \times \vec{c}, \vec{d} \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{d}$

Suy ra $\vec{e} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{d} = \vec{d} \times \vec{a} = \vec{a} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{e}$. Điều này chứng tỏ đường thẳng nối E và trung điểm cạnh đối cũng đi qua O.

Bài toán 1.2.5. (Đề thi vô địch Anh - 1981).

Cho tam giác ABC cân tại A. D là trung điểm cạnh AB, I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, E là trọng tâm của tam giác ABC. Chứng minh IE vuông góc với CD.

Lời giải: